Vektoranalysis

Wegintegrale

Vektoranalysis

Wegintegrale

Inhalt

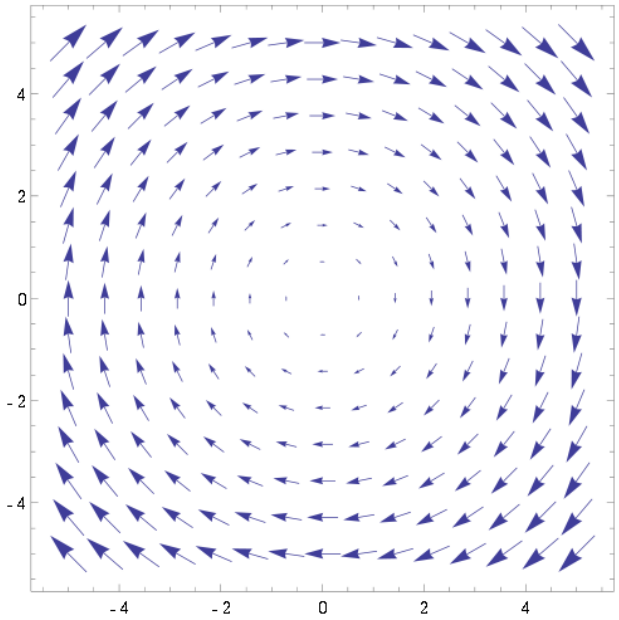
Übersicht:

- Arbeit in einem Kraftfeld
- Wegintegrale
- Parametrisierung von Kurven
- Berechnung von Wegintegralen

Beispiel: Arbeit im Kraftfeld

Wir betrachten die Bewegung in einem Kraftfeld, z.B.:

- im Gravitationsfeld der Erde
- einer Ladung im elektrischen Feld
- in einer Flüssigkeitsströmung
- in einem Sturm



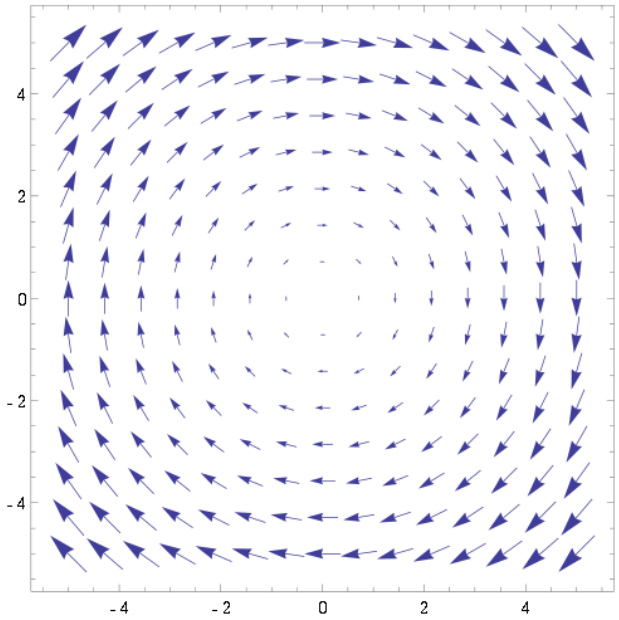
Vektoranalysis

Wegintegrale

Beispiel: Arbeit im Kraftfeld

Wir betrachten die Bewegung in einem Kraftfeld, z.B.:

- im Gravitationsfeld der Erde
- einer Ladung im elektrischen Feld
- in einer Flüssigkeitsströmung
- in einem Sturm

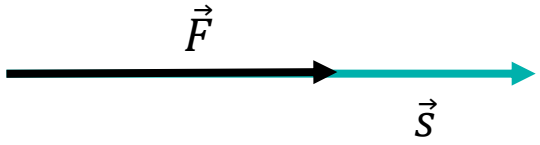


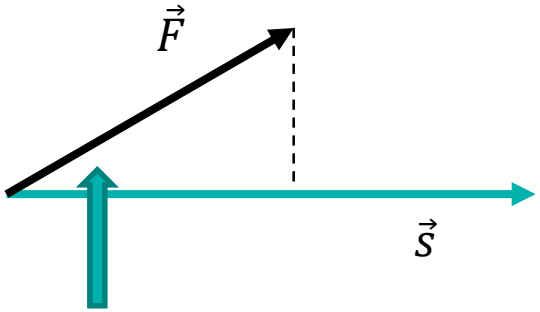
Fragen:

- Welche Arbeit müssen wir aufbringen?
- Spielt der Weg eine Rolle?

Beispiel: Arbeit im Kraftfeld

Wie berechnen wir die Arbeit?





Winkel α

Es gilt:

Arbeit = Kraft * Weg $\Rightarrow$ $W = \left|\vec{F}\right| \cdot |\vec{s}|$

Berechnung im rechtwinkligen Dreieck:

$\cos\alpha = \frac{|\vec{F}_s|}{|\vec{F}|}$ $\Rightarrow$ $\left|\vec{F}_s\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha$

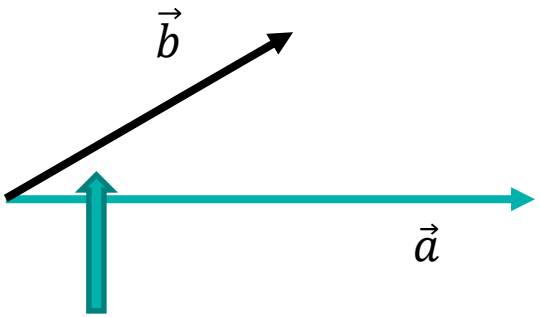
$\Rightarrow$ $W = \left|\vec{F}_s\right| \cdot |\vec{s}| = \left|\vec{F}\right| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$

Vektoranalysis

Wegintegrale

Beispiel: Arbeit im Kraftfeld

Wie berechnen wir die Arbeit?



Winkel α

Definition Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Berechnung der Arbeit:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

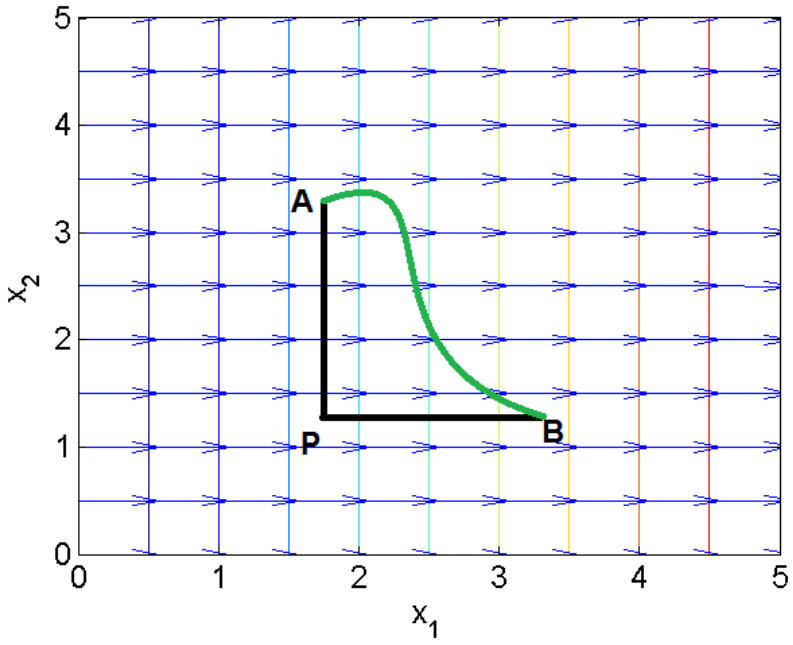
Vektoranalysis

Wegintegrale

Beispiel: Arbeit im Kraftfeld

Wir gehen einen Schritt weiter…

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gesucht ist die geleistete Arbeit auf dem Weg von A nach B

Schwarzer Weg:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AP} + \vec{F} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 + 1 \cdot \left|\overrightarrow{PB}\right|$$

Grüner Weg:

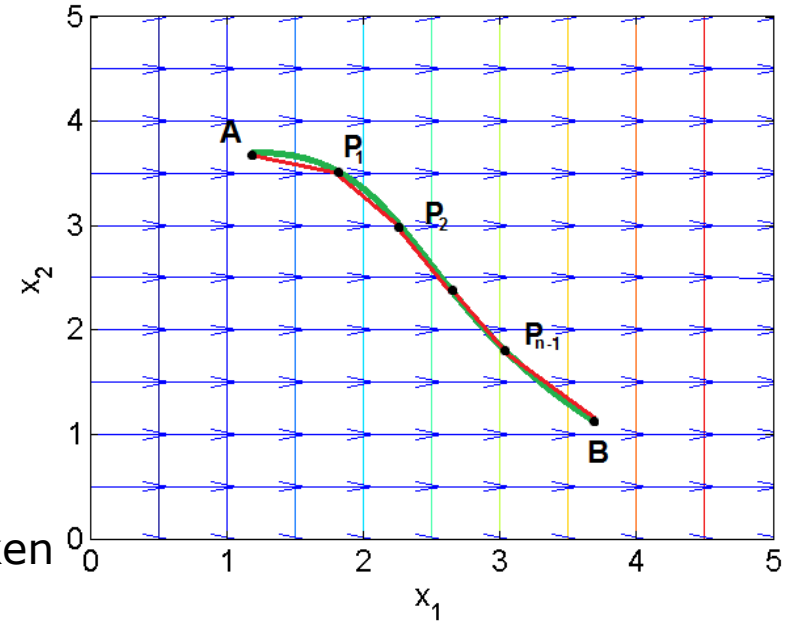
Unterteile den komplizierten Weg in einzelne Streckenzüge und wende die Formel aus Mathe 1 an…

Vektoranalysis

Wegintegrale

Beispiel: Arbeit im Kraftfeld

Umsetzung der Idee…



- Zwischenpunkte P_i einfügen
- Erhalten Streckenzug mit Teilstrecken

$$\overrightarrow{AP_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \dots \overrightarrow{P_{n-1}B}$$

- Berechne Arbeit entlang der Teilstrecken

$$W_i = \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{P_iP_{i+1}} \qquad i = 0,1,2, \dots n-1$$

- Gesamtarbeit durch Summation…

$$W = \sum_{i=0}^{n-1} W_i = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{P_iP_{i+1}}$$

Wir definieren:

$$P_0 = A \quad \text{und} \quad P_n = B$$
$$\vec{F}_i = \vec{F}(P_i)$$

Wie genau ist das?

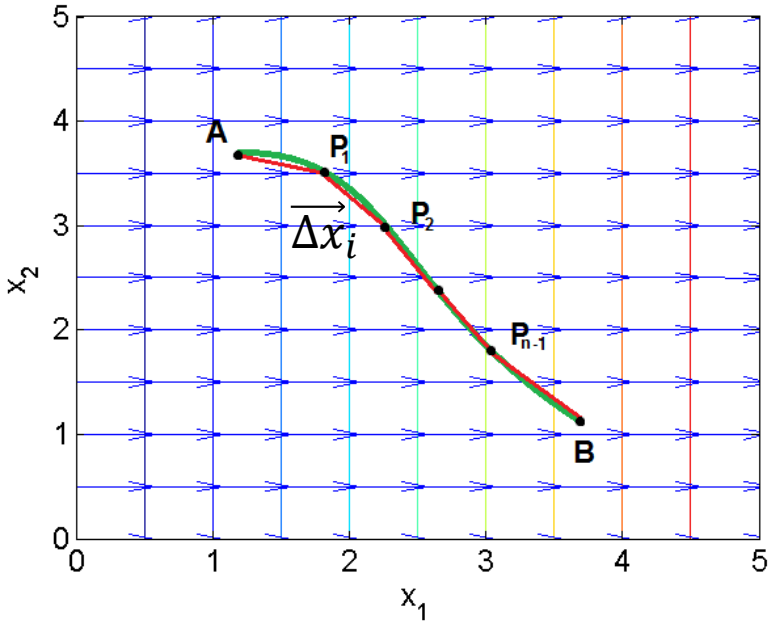
Wie können wir genauer werden?

Wegintegrale

Beispiel: Arbeit im Kraftfeld

Wir haben folgende Approximation…

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{P_i P_{i+1}}$$



Annahmen:

$\overrightarrow{\Delta x_i}$ ist ein Vektor der in Richtung $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ zeigt und die die Länge $\left|\overrightarrow{P_i P_{i+1}}\right| = \Delta x_i$ hat

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{\Delta x_i}$$

Grenzübergang
$\Delta x_i \to 0$

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx}$$

Weg- oder Linienintegral

Bezeichnungen

Wir haben das Wegintegral gefunden:



tangential zur Kurve mit infinitesimal kleiner Länge

Vektorfeld $\vec{F}$

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx}$$

Γ bezeichnet den Weg

Kurvenelement

Wegintegrale

Was fehlt uns zum Berechnen?

Wir haben das Wegintegral gefunden:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx}$$

Wir müssen irgendwie den Weg durch Formeln beschreiben…



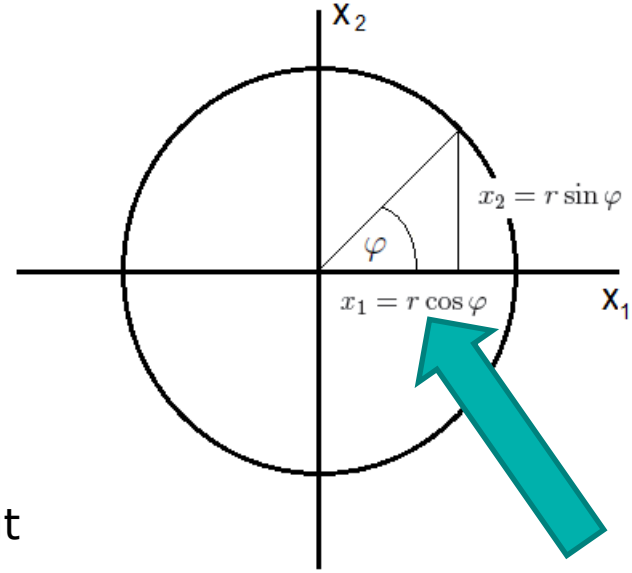
Parametrisierung des Weges

Vektoranalysis

Wegintegrale

Parametrisierung des Weges

Als Beispiel parametrisieren wir den Kreis mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung…



Winkel φ

Da wir eine 1d Kurve parametrisieren, genügt ein Parameter zur Beschreibung…

Polarkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0,2\pi)$$

Wir erhalten folgende Abbildung, die den Kreis beschreibt…

$$\vec{\gamma}\,(\varphi) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0,2\pi)$$

Vektoranalysis

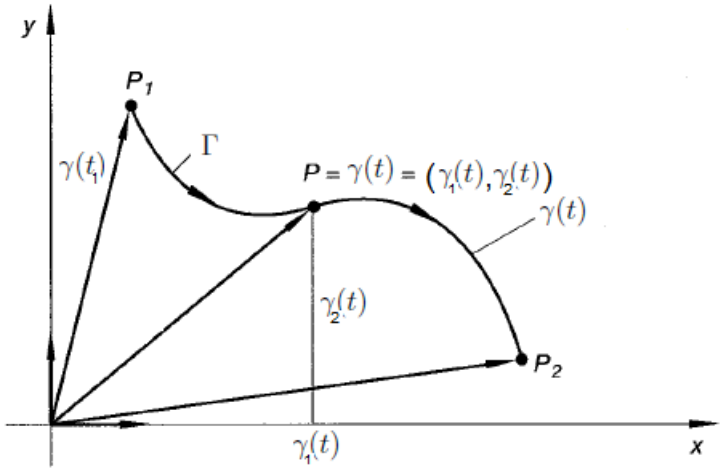
Wegintegrale

Parametrisierung des Weges

Wir betrachten die Situation für eine allgemeine Kurve Γ…

Wir stellen die Kurve mit Hilfe des Kurvenparameters t dar…

$$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \vec{\gamma}(t) \qquad (n = 2,3)$$

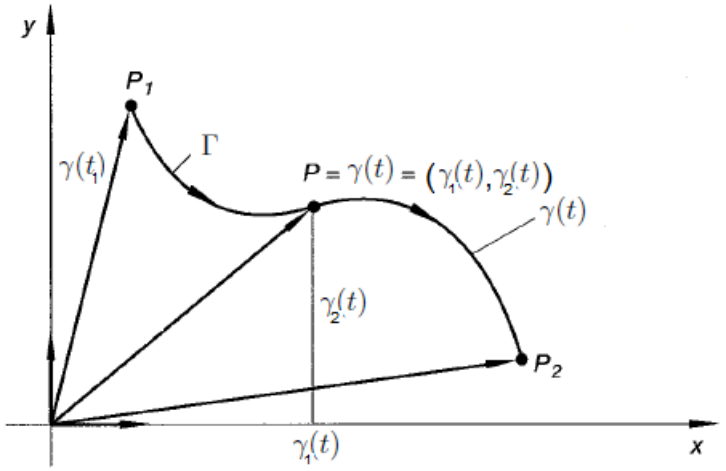


Quelle: Papula Band 3

Wegintegrale

Parametrisierung des Weges

Wir betrachten die Situation für eine allgemeine Kurve Γ…



Quelle: Papula Band 3

Wir stellen die Kurve mit Hilfe des Kurvenparameters t dar…

$$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \vec{\gamma}(t) \qquad (n = 2,3)$$

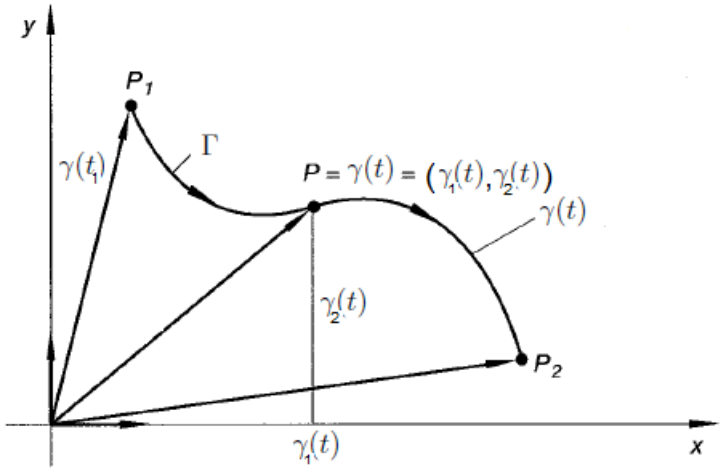
Bedeutung:

Zu jedem Punkt P gehört ein Kurvenparameter $t \in [t_1, t_2]$ mit

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

Parametrisierung des Weges

Wir betrachten die Situation für eine allgemeine Kurve Γ…



Quelle: Papula Band 3

Wir stellen die Kurve mit Hilfe des Kurvenparameters t dar…

$$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \vec{\gamma}(t) \qquad (n = 2,3)$$

Bedeutung:

Zu jedem Punkt P gehört ein Kurvenparameter $t \in [t_1, t_2]$ mit

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

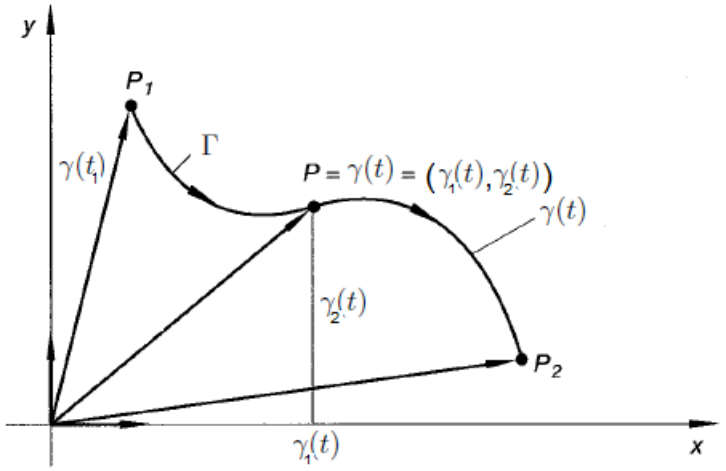
Die Punkte zu t_1 und t_2 beschreiben den Anfangs- und Endpunkt.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Wegintegrale

Parametrisierung des Weges

Wir betrachten die Situation für eine allgemeine Kurve Γ…



Quelle: Papula Band 3

Wir stellen die Kurve mit Hilfe des Kurvenparameters t dar…

$$\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \vec{\gamma}(t) \qquad (n = 2,3)$$

Bedeutung:

Zu jedem Punkt P gehört ein Kurvenparameter $t \in [t_1, t_2]$ mit

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

Die Punkte zu t_1 und t_2 beschreiben den Anfangs- und Endpunkt.

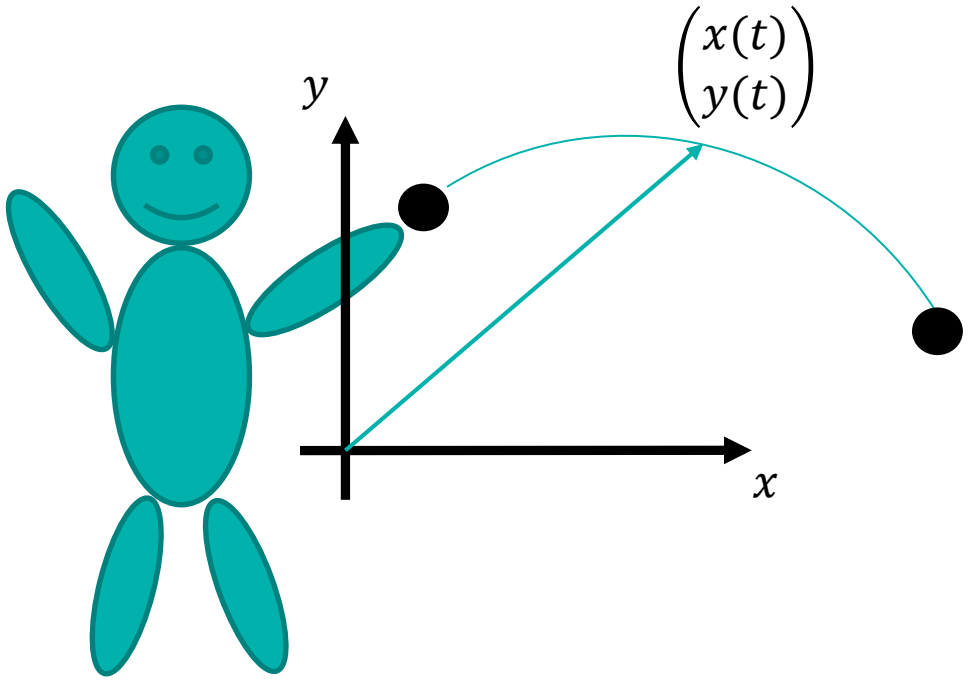
Durchläuft t das Intervall $[t_1, t_2]$ durchläuft der zugehörige Punkt die Kurve.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Physikalisches Beispiel

Wir werfen einen Ball und beobachten die Bahnkurve.

Jedem Zeitpunkt t wird ein entsprechender Ort zugeordnet, an dem sich der Ball zur Zeit t befindet.



Die Bahnkurve wird durch die Zeit parametrisiert:

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir betrachten den direkten Weg vom Punkt A zum Punkt B, d.h. die Gerade zwischen A und B:

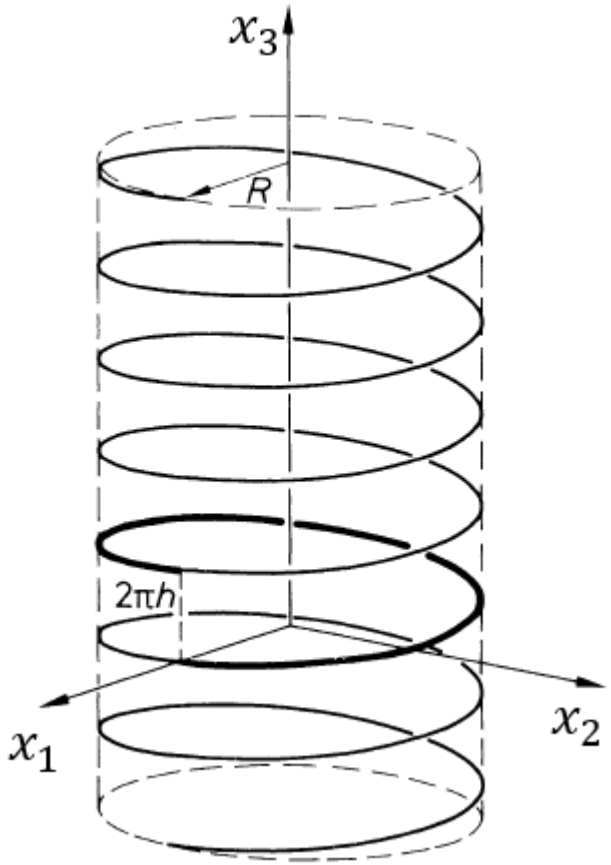
$$A = (1, 2, 1) \qquad B = (2, 2, 2)$$

Wie können wir diesen Weg parametrisieren?

$$\vec{\gamma}(\lambda) = \vec{a} + \lambda\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \lambda\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \lambda \in [0,1]$$

Beispiel: Schraubenlinie

Wir suchen eine Parametrisierung…



Quelle: Papula Band 3

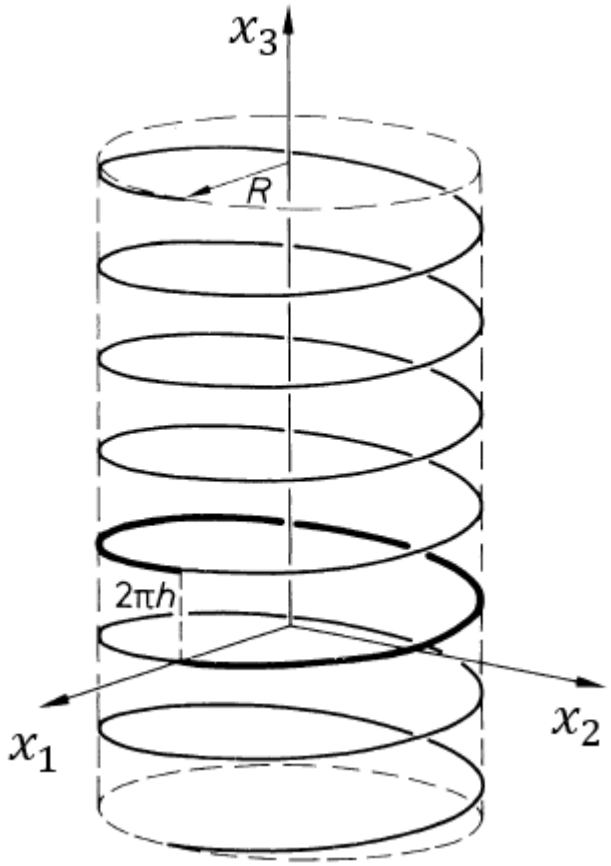
Wegintegrale

Beispiel: Schraubenlinie

Wir suchen eine Parametrisierung…

Schauen wir von oben auf die Schraubenlinie, so sehen wir nur Kreise mit dem Radius R…

$$x_1 = R \cdot \cos\varphi$$
$$x_2 = R \cdot \sin\varphi$$



Quelle: Papula Band 3

Wegintegrale

Beispiel: Schraubenlinie

Wir suchen eine Parametrisierung…

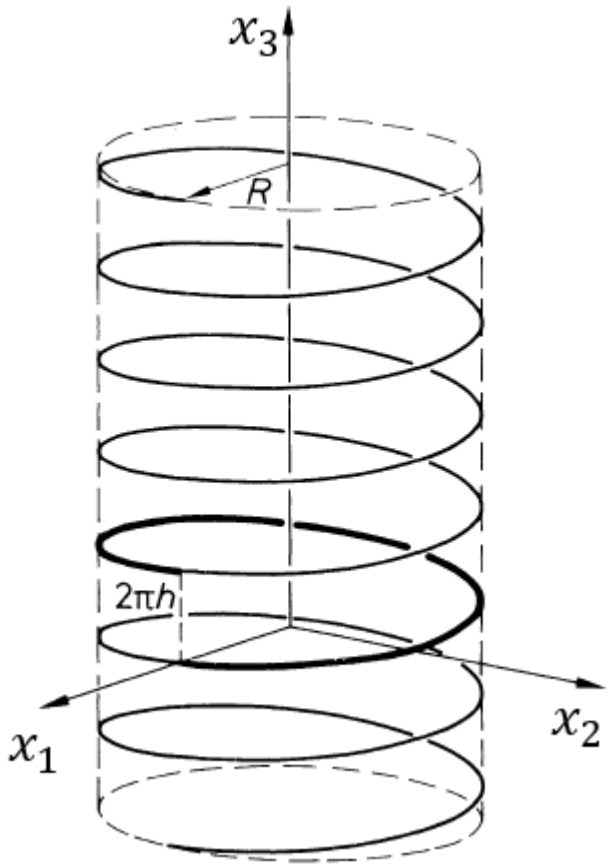
Schauen wir von oben auf die Schraubenlinie, so sehen wir nur Kreise mit dem Radius R…

$$x_1 = R \cdot \cos\varphi$$
$$x_2 = R \cdot \sin\varphi$$

Die dritte Koordinate (Höhe) ergibt sich aus der Ganghöhe $2\pi h$…

$$x_3 = h\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\varphi \\ R \cdot \sin\varphi \\ h\varphi \end{pmatrix}$$

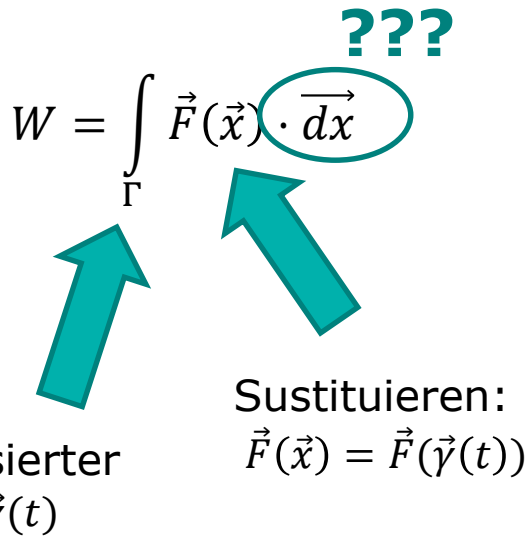


Quelle: Papula Band 3

Wegintegrale

Was fehlt uns zum Berechnen?

Wir haben das Wegintegral gefunden:



Wie berechnen wir $\overrightarrow{dx}$?

Berechnung von $\overrightarrow{dx}$

Das Kurvenelement ist tangential zur Kurve.

Daher berechnen wir den Tangentialvektor.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

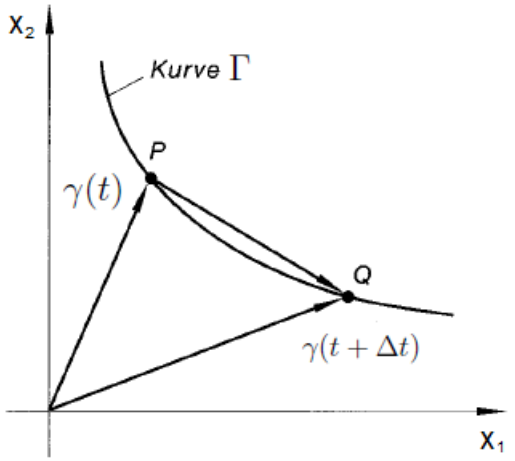
Vektoranalysis

Wegintegrale

Berechnung von $\overrightarrow{dx}$

Das Kurvenelement ist tangential zur Kurve.

Daher berechnen wir den Tangentialvektor.



Quelle: Papula Band 3

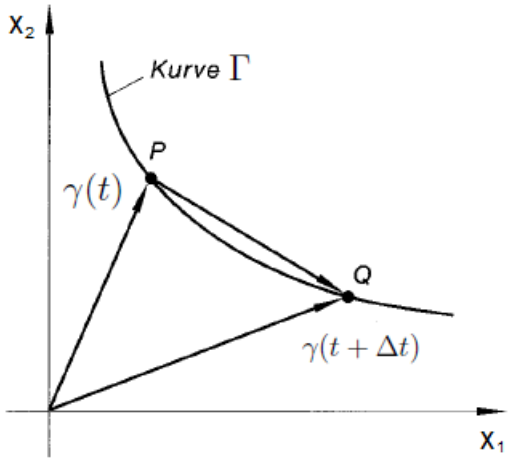
- Wir approximieren durch die Sekante von P nach Q
- Parametrisierung: $P = \vec{\gamma}(t)$ und $Q = \vec{\gamma}(t + \Delta t)$
- Sekante: $\vec{\gamma}(t + \Delta t) - \vec{\gamma}(t)$

Wegintegrale

Berechnung von $\overrightarrow{dx}$

Das Kurvenelement ist tangential zur Kurve.

Daher berechnen wir den Tangentialvektor.



Quelle: Papula Band 3

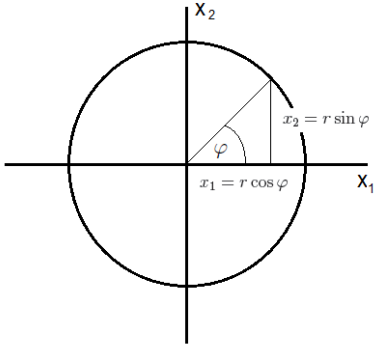
- Wir approximieren durch die Sekante von P nach Q
- Parametrisierung: $P = \vec{\gamma}(t)$ und $Q = \vec{\gamma}(t + \Delta t)$
- Sekante: $\vec{\gamma}(t + \Delta t) - \vec{\gamma}(t)$

Den Tangentenvektor erhalten, indem wir durch Δt teilen und den Grenzwert $\Delta t \to 0$ bilden (wie bei der Ableitung)…

$$\vec{\gamma}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\gamma}(t + \Delta t) - \vec{\gamma}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix}$$

Vektoranalysis

Wegintegrale



Sie sind an der Reihe

Wir suchen den Tangentenvektor zum Einheitskreis mit Mittelpunkt im Ursprung.

Parametrisierung:

$$\vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0,2\pi)$$

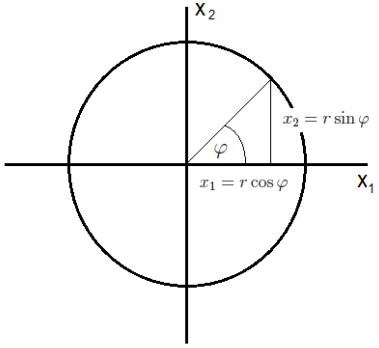
Tangentenvektor:

$$\vec{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in [0,2\pi)$$

Vektoranalysis

Wegintegrale

Sie sind an der Reihe



$$\vec{\gamma}(\varphi) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen das Ergebnis…

Nordpol $\varphi = {}^{\pi}/_{2}$ ⇒ $\vec{\gamma}(N) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Südpol $\varphi = {}^{3}/_{2}\,\pi$ ⇒ $\vec{\gamma}(S) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P = (1,0)$ $\varphi = 0$ ⇒ $\vec{\gamma}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = (-1,0)$ $\varphi = \pi$ ⇒ $\vec{\gamma}(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Wegintegrale

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie den Tangentenvektor zur Gerade…

$$\vec{\gamma}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



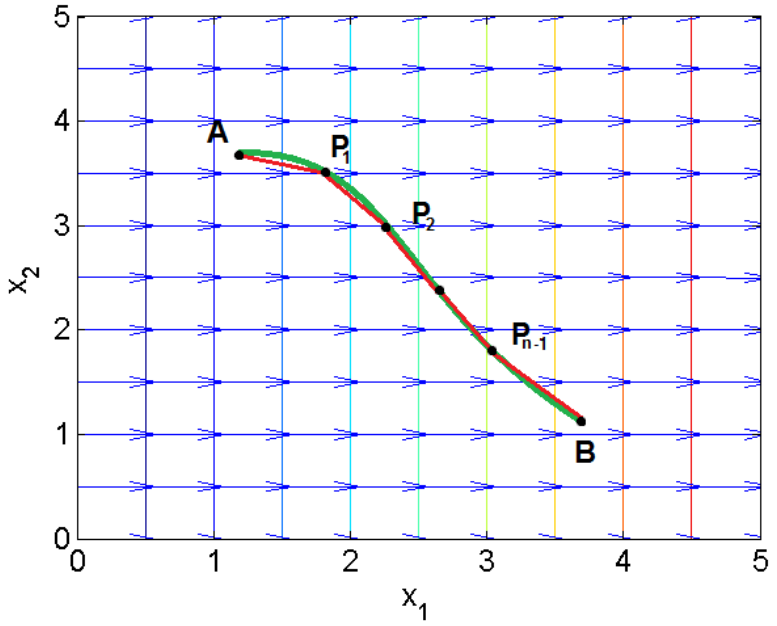
$$\vec{\gamma}'(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (Richtungsvektor)

Vektoranalysis

Wegintegrale

Berechnung des Wegintegrals

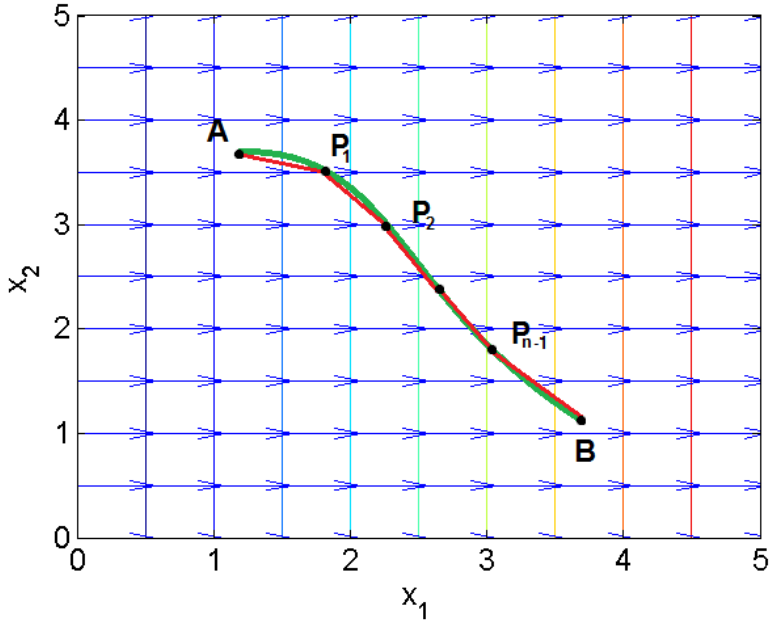
Wir setzen unsere bisherigen Ergebnisse zusammen…



Berechnung des Wegintegrals

Wir setzen unsere bisherigen Ergebnisse zusammen…

Wir haben die Arbeit wie folgt approximiert:



$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(P_i) \cdot \overrightarrow{P_i P_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}\big(\vec{\gamma}(t)\big) \cdot \big(\vec{\gamma}(t+\Delta t) - \vec{\gamma}(t)\big)$$

Parametrisierung einsetzen

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}\big(\vec{\gamma}(t)\big) \cdot \frac{\vec{\gamma}(t+\Delta t) - \vec{\gamma}(t)}{\Delta t}\, \Delta t$$

Erweitern mit Δt

Der Grenzwert $\Delta x \to 0$ entspricht $\Delta t \to 0$…

$\Delta t \to 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\big(\vec{\gamma}(t)\big) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

Berechnung des Wegintegrals

Wir berechnen ein Wegintegral über einen Weg Γ wie folgt:

- Weg parametrisieren: $\vec{\gamma}(t)$ mit Parameterintervall $[t_1, t_2]$
- Tangentenvektor bestimmen: $\vec{\gamma}'(t)$
- Das Wegintegral ausrechnen:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

„normales" Integral über den Parameter t

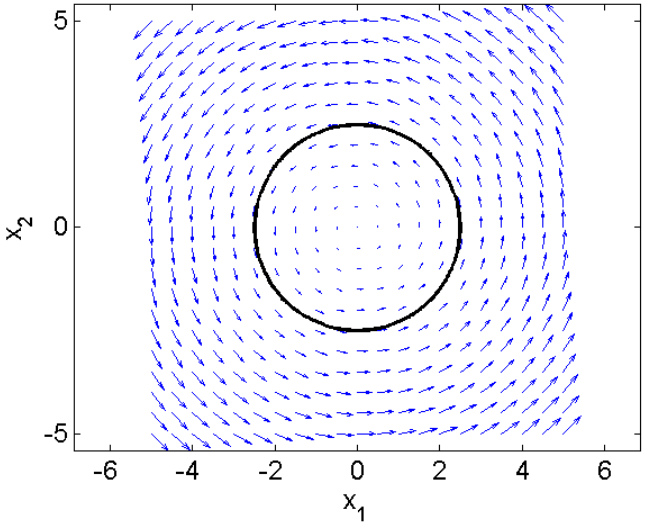
Vektoranalysis

Wegintegrale

Beispiel

Wir integrieren entlang des Einheitskreises mit Mittelpunkt im Ursprung über das folgende Vektorfeld…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



Parametrisierung: $\vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi)$

Tangentenvektor: $\vec{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi)$

Wegintegral:

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1} \, d\varphi = 2\pi$$

Vektoranalysis

Wegintegrale

Jetzt sind sie an der Reihe…

Wir integrieren entlang des Einheitskreises mit Mittelpunkt im Ursprung über das folgende Vektorfeld…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung: $\vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi)$

Tangentenvektor: $\vec{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi)$

Wegintegral:

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} -\sin\varphi \; d\varphi = 0$$